

شهودگرایی در ریاضیات^۱

میشائیل دتلفسن

ترجمه ابوالفضل حقیری*

اشاره

در فلسفه ریاضی، سه مکتب مهم وجود دارد: شهودگرایی، صورت‌گرایی و منطق‌گرایی. شهودگرایی که مؤسس آن براوتر است. وی اهمیت را به شهود ریاضی دان می‌دهد و آن را به مثابه مبنای کار می‌گیرد و تلاش می‌کند تا ریاضیات را از روابط منطقی صرف رها سازد. شهودگرایی فرایندهای ذهنی را مبنای ریاضیات فرض می‌کند. در این مقاله، مؤلف درباره شهودگرایی و تاریخ آن بحث می‌کند.

واژگان کلیدی: شهودگرایی، شهود، شهود ریاضی، فرگه، گاوس، کرونگر، هندسه‌های ناقلیدسی، منطق‌گرایی، اصل آفرینش

بر شهودگرایی اوایل این قرن نیز، مانند منطق‌گرایی فرگه، (۱) این اندیشه که آنچه ذهن فقط از خود مطرح می‌سازد، نمی‌تواند از آن پنهان باشد؛ و (۲) باور به این که وجود هندسه‌های ناقلیدسی، تفاوت‌های معرفت‌شناختی عمده‌ای را میان هندسه و حساب آشکار می‌سازد، حاکم بود. ظاهراً اسلاف مستقیم شهودگرایان، گاوس و کرونگر (Kronecker) بوده‌اند که کشف هندسه‌های ناقلیدسی را متفاوت از فرگه تفسیر کردند. زیرا هر چند فرگه

*. کارشناسی ارشد فلسفه علم از واحد علوم و تحقیقات دانشگاه آزاد اسلامی.

برای تبیین اختلافات آشکار میان حساب و هندسه که کشف هندسه ناقلیدسی روشن ساخته بود، تعدیلی واقع‌گرایانه را در اصل آفرینش پیشنهاد کرد، اما گاوس و کرونگر و شهودگرایان پس از آنها، تفاوت میان حساب و هندسه را در پرتوی اصل آفرینش (یعنی اصل (۱) فوق) تفسیر کردند، که خوانش ایده‌آلیستی آن را پذیرفته بودند.

بدین ترتیب، به عوض حفظ برداشت پیشینی ترکیبی کانت و تلاش برای تبیین تفاوت میان هندسه و حساب با اثبات تحلیلی بودن حساب، شهودگرایان نخستین، برداشت پیشینی ترکیبی کانت را از هندسه رد کردند و پیشنهاد کردند که تفاوت‌های میان حساب و هندسه چنین تبیین گردد که اولی را پیشینی و دومی را پسینی بدانیم. آن گونه که گاوس و کرونگر تأکید کرده‌اند، حساب محصول محض عقل انسانی است، در حالی که هندسه را چیزهایی بیرون از عقل انسانی معین می‌سازد.^۲ سال‌ها بعد (نگاه کنید به [۲، ۱۴۸]، [۲۲]، ویل، با ذکر این که «اعداد به مقیاسی بسیار بزرگ‌تر از اشیا و نسبت‌های فضا، محصول آزاد ذهن انسان و بنابراین، برای ذهن انسان عیان هستند»، همین موضوع را تکرار کرد.

براوئر هم که علت مرگ شهودگرایی را از زمان کانت [نگاه کنید به [2.16]، رد باور کانت به شهود پیشینی فضا با کشف هندسه‌های ناقلیدسی می‌دانست، اندیشه‌های مشابهی را بیان کرده است. اما، در عین حال، وی از وفاداری مصصمانه به شهود پیشینی از زمان حمایت می‌کرد و حتی ادعا می‌نمود که از این شهود می‌توان دوباره و از طریق «حسابی‌سازی» هندسه توسط دکارت، دوباره به نظامی از احکام هندسی دست یافت. وی، «شهود نخستین از زمان» را - که آن را تقسیم لحظه‌ای از زندگی به بخشی که در گذار است و بخشی که در حال شدن است - «پدیده بنیادی عقل انسان» (همان، ص. ۱۲۷)^۳ می‌دانست. از این شهود می‌توان، از طریق فرایند انتزاع، به مفهوم «یگانگی-دوگانگی آشکار» رسید که بر اوئر آن را مفهوم بنیادی تمام ریاضیات می‌دانست. پس از آن، شناخت بیشتر از امکان ادامه دادن نامحدود این فرایند از سوی عقل، آن را از طریق اردینال‌های متناهی به کوچک‌ترین اردینال ترامتناهی، و سرانجام به شهود پیوستار خطی می‌رساند (یعنی به آن کثرت یکی‌شده عناصری که نمی‌توان آنها را گردایه صرف واحدها دانست، زیرا روابط میان‌گذاری (relations of interposition) که آنها را به هم پیوند می‌دهد، با میان‌گذاری

صرف واحدهای جدید، به پایان نمی‌رسد). بنابراین، براوئر معتقد بود (همان، صص. ۲-۱۳۱) که نخست حساب و سپس هندسه (هرچند فقط هندسه تحلیلی)، با تقلیل اولی به دومی از طریق کلکولوس مختصات دکارت، به مثابه ترکیبی پیشینی توصیف می‌شوند.^۴

بدین ترتیب، شهودگرایان نخستین، ظاهر وفادارانه را نسبت به باور کانت به ترکیبی بودن پیشینی معرفت حسابی، ضمن رد باور وی به پیشینی بودن معرفت ما به ویژگی‌های مبنایی فضای بصری، حفظ کردند. ایشان در برداشت خود از استنتاج ریاضی نیز، سرسختانه کانتی بودند. به ویژه، پوانکاره و براوئر، به این نکته توجه زیادی کردند.^۵ در واقع، پوانکاره که در سال‌های نخستین این قرن [قرن بیستم] با راسل بحث مشهوری داشت،^۶ نقش استنتاج منطقی را در برهان ریاضی، به قطعاً اصلی انتقاد خود از منطق‌گرایی تبدیل نمود. در اصل، براوئر نیز چنین کرد؛ هرچند هدف انتقاد وی، استفاده از استدلال منطقی در ریاضیات کلاسیکی به طور کلی بود و نه فقط خواست برنامه‌ای منطق‌گرایان در مورد منطقی‌سازی برهان.

در کانون این دیدگاه به برهان که هر دو از آن انتقاد می‌کردند، برداشتی از مدرک-برداشتی کلاسیکی از مدرک-قرار دارد که آن را اساساً وسیله‌ای برای تعیین ارزش درستی (کلاسیکی) گزاره می‌داند. در این دیدگاه، مدرک، وسیله‌ای «انعطاف‌پذیر» است. اثرات آن، به انواع گزاره‌ها، غیر از آن که محتوی مستقیم آن را تشکیل می‌دهد، بسط می‌یابد. این، در نتیجه قرار دادن محتوی یک مدرک تحت تحلیل منطقی، که از آن برای استخراج محتویات «جدید» از محتوی اصلی استفاده می‌شود، حاصل می‌گردد. بدین وسیله، آن قدرت توجیهی را که مدرک برای محتوی آن تأمین می‌کند، می‌توان به آن محتوایی که با تحلیل استخراج شده، منتقل نمود. از این رو، از یک مدرک و از همان یک مدرک، می‌توان برای تشخیص ارزش درستی انواع گزاره‌های متفاوت استفاده نمود. به علاوه، این امر، به رغم آن که تحلیلی مشابه وجود ندارد که معطوف به خود مدرک و هدف آن آشکار ساختن بخشی جدایی‌پذیر از مدرک باشد که محتوی آن دقیقاً همان محتوی جدیدی است که با تحلیل محتوی مدرک حاصل گردیده است، معتبر است. پس، در قانون کلاسیکی محتوی گزاره‌ای یک مدرک را می‌توان از خود مدرک «جدا ساخت». بنابراین، با اعمال تحلیل منطقی بر

محتوی «جداشده»، می‌توان تضمین (warrant) وابسته به آن را به هر یک از گزاره‌های جدید را که با آن تحلیل استخراج شده‌اند، منتقل نمود.

هم براوتر و هم پوانکاره، به شدت در برابر این دیدگاه به استنتاج واکنش نشان دادند. واکنش براوتر بر این نظر مبتنی بود که معرفت ریاضی، اساساً، محصول تجربه درون‌نگرانه است (نگاه کنید به [2.17]، ۴۸۸). بنابراین، مصداق یا توسعه چنین معرفتی نمی‌تواند از طریق برون‌یابی محتوی آن انجام گیرد، زیرا این برون‌یابی تضمین نمی‌کند که مصداق مشابه تجربه همان محتوی برون‌یابی شده را به مثابه محتوی خود داشته باشد. بدین ترتیب، معرفت به راستی ریاضی، مستلزم بسط تجربه ریاضی است که به مثابه مدرکی برای محتوی معینی در تجربه ریاضیاتی از محتوی دیگری به کار می‌آید. (در این جا، تجربه چنان فهمیده می‌شود که آن را قادر سازد که به مثابه مدرکی برای محتوی معینی عمل نماید، فقط اگر آن محتوی، محتوی خود آن باشد). به عبارت دیگر، استنتاج را نباید استخراج منطقی محتویات جدید از قدیم و سپس انتقال تضمین از قدیمی به جدید دانست. بلکه، باید آن را فرآیند انتقال تجربی سازه‌ای درون‌نگرانه که دارای یک محتوی است به سازه درون‌نگرانه دیگری که محتوای دیگری دارد، دانست.

بنابراین، براوتر معتقد بود که هرگز نمی‌توان «حالت ریاضی چیزها را» با استنتاج منطقی «استنتاج کرد» (نگاه کنید به [2.18]، ۵۲۴، تأکید از من است).^۷ وی این نظر را در به اصطلاح قانون نخست شهودگرایی خود به یادها سپرد که طی آن اعلام نمود که ریاضیات باید «با تصدیق این که ریاضیات شهودگرایانه فعالیت ذهن است که اساساً فارغ از زبان است و منشأ آن در درک حرکت زمان قرار دارد، از زبان ریاضی و از این روی از آن پدیده‌های زبان که منطق نظری توصیف می‌کند»، کاملاً جدا شود (نگاه کنید به [2.21]، ۴). بدین ترتیب، براوتر به برداشت اساساً کانتی از استدلال ریاضی پایبند بود که بر اساس آن، بسط معرفت ریاضی از طریق استنتاج، مستلزم توسعه شهود جدیدی بود که در بنیان آن استنتاج قرار دارد. پوانکاره نیز چنین برداشتی را پذیرفت، هرچند نظر وی از برخی جهات با براوتر متفاوت بود. استدلال ریاضی، آن گونه که وی بیان می‌کرد (نگاه کنید به [2.29]، ۳۲)، دارای «نوعی فضیلت خلاق» است که بر اساس آن، نتایج آن [استدلال

ریاضی]، فراتر از مقدمات آن می‌روند، به طریقی که نتایج استنتاجات منطقی از مقدمات خود فراتر نمی‌روند. بنابراین، استنتاج منطقی از گزاره‌ای که از لحاظ ریاضی معلوم است، هر چند ممکن است به نوعی بسط آن معرفت بیانجامد، با این همه، معمولاً، به بسط آن معرفت به راستی ریاضی که به وسیله آن نمایش داده می‌شود، نمی‌انجامد. خلاصه آن که برای آن که معرفت ریاضی که p به معرفت ریاضی که q بسط بیابد، کافی نیست که دریابیم که p از لحاظ منطقی استلزام می‌کند که q . بلکه، باید p را هم از نظر ریاضی متفاوت از q دانست و هم دریافت که به طور ریاضی استلزام می‌کند که q (نگاه کنید به [2.100], ch. 1, section 5; [2.101], bk II, ch. 2, section 6). به عبارت دیگر، «حرکت» از مقدمه به نتیجه در استنتاج ریاضی، درک توأمان مقدمات و نتیجه است به وسیله «کلی» ریاضی مشترکی که تصور می‌شود در «اختلافاتی» که از میان آنها «حرکت می‌کند»، پایدار می‌ماند.

پس، از نظر پوانکاره، استدلال ریاضی، عبارت است از تلفیق گزاره‌های مختلف با ساختار یا معماری‌ای که به طور بارز ریاضیاتی است. بدین ترتیب، در نزد پوانکاره نیز، همان گونه که در نزد براوئر، دیدگاهی به استدلال ریاضی را می‌یابیم که به شدت با برداشت «منطق‌گرایان» از استدلال ریاضی در تضاد است.

بنابراین دیدگاه‌های براوئر و پوانکاره به استدلال یا استنتاج ریاضی، کانتی است از آن جهت که این اندیشه را رد می‌کنند که استنتاج به راستی ریاضی، می‌تواند منطقی باشد. اما، آنها در عین حال نماینده تغییری در دیدگاه کانت نیز هستند. زیرا کانت گفته بود (نگاه کنید به [2.86], ۶-۷۴۱) که با استدلال به راستی ریاضی از مجموعه معینی از مقدمات، می‌توان نتایجی به دست آورد که با استدلال منطقی محض (یعنی تحلیلی یا برهانی محض) از همان مقدمات دست‌نیافتنی است. اما به نظر نمی‌رسد چنین اندیشه‌ای، اصلاً، در براهین پوانکاره و براوئر آمده باشد.^۸ آنچه ایشان بر آن تأکید می‌کردند، تفاوت در کیفیت معرفتی میان استدلال منطقی و ریاضی بود- تفاوتی که، از نظر ایشان، حتی اگر معلوم گردد که دو نوع استدلال از نظر نتیجه، هم‌ارز هستند، به جای خود باقی خواهد ماند. این تأکید بر کیفیت معرفتی بر باور ایشان به تفاوت میان آن شرط معرفتی شخص که استنتاج وی بر

مراحل ختشی نسبت به موضوع استنتاج منطقی مبتنی است و آن کس که استنتاج وی بر بینش‌های ویژه-موضوع (topic-specific) به موضوع ریاضی خاص مورد نظر متکی است، مبتنی می‌باشد. پیش‌فرض استدلال نوع اخیر، معرفت به «معماری» موضعی موضوع است. نوع استدلال نخست، چنین پیش‌فرضی ندارد. با استفاده از استعارات پوانکاره، می‌توانیم گفت که تفاوت (۱) مانند تفاوت میان نویسنده‌ای که فقط به دستور زبان معرفت دارد و نویسنده‌ای که تصویری از داستان دارد (نگاه کنید به [2.101], bk. II, ch. 2)؛ یا (۲) میان شطرنج‌بازی که فقط به حرکت‌های مجاز چند مهره معرفت دارد و بازیگری که فهمی تاکتیکی از بازی هم دارد ([2.100], pt. I, ch. I, section V)، است.

بدین ترتیب، شهودگرایان، درباره پرسش از ماهیت استدلال ریاضی با منطق‌گرایان در تقابل قرار داشتند. به علاوه، کانون اختلاف ایشان، نه نزاعی در مورد این که کدام منطق، منطق صحیح است، بلکه اختلافی عمیق‌تر در مورد نقشی بود که هر استنتاج منطقی - کلاسیکی یا غیرکلاسیکی - باید در استدلال ریاضی ایفا نماید. به عبارت دیگر، ایشان در مورد این پرسش کانتی از هم منشعب گردیده بودند که آیا شهود در استنتاج ریاضی نقشی بی‌جایگزین دارد. شهودگرایان، در باور به اینکه چنین است، جانب کانت را گرفتند. منطق‌گرایان، نظر مقابل را برگزیدند.^۹

بدین ترتیب، در شهودگرایی براوئر، پوانکاره و ویل، تلاش برای رسیدن به شکلی تغییر یافته از معرفت‌شناسی به ویژه ریاضی کانت را می‌یابیم. تا اینجا، تغییرات مورد اشاره، عبارت بودند از (۱) رها شدن از کاربرد کانت از شهود فضایی به مثابه بنیانی برای معرفت ریاضی، و (۲) بسط و پرورش کاربرد وی از شهود زمانی به مثابه بنیانی برای حساب (و در همین رابطه، تقلیل هندسه به حساب با توسل به «حسابی‌سازی» هندسه از سوی دکارت).

اما، یک تغییر نهایی وجود دارد که باید بدان اشاره کرد و آن به برداشت شهودگرایان (به ویژه، براوئر و ویل) از دعاوی وجود مربوط می‌شود. شاید، این مهم‌ترین تغییر انجام یافته باشد و عبارت است از عزیمت از برداشت کانت از دعاوی وجود و معرفت ما از آنها به برداشتی از دعاوی وجود که بیشتر شبیه آن است که در نزد

ایده آلیست‌رمانتیک‌های پساکانتی مانند فیشته (Fichte)، شلینگ (Schelling) و گوته (Goethe) یافت می‌شود. عنصر غیرکانتی اصلی این دیدگاه، طرح شکلی غیرحسی و یکسره فکری از شهود (*intellektuelle Anschauung*) بود.^{۱۰} این را به مثابه شکلی از معرفت به خود تلقی می‌نمودند که جنبه معرفتی کلیدی آن بی‌واسطگی آن بود- بی‌واسطگی‌ای که دغدغه ایده آلیست‌رمانتیک‌ها را در مورد اثرات معرفتی بازنمایی (representation) بیان می‌نمود. ایشان، بازنمایی را منبع اصلی خطا و عدم قطعیت در شناخت می‌دانستند و از این روی، از پرهیز از آن حمایت می‌نمودند.

استدلال ایشان اساساً کانتی بود. یعنی با این مقدمه کانتی آغاز می‌کردند که هیچ اندیشه مفهومی (به طور عام‌تر، هیچ بازنمایی‌ای) حاوی هستی یا وجود آنچه بازمی‌نماید، نیست^{۱۱} و از آن نتیجه می‌گرفتند که هیچ مفهوم یا اندیشه‌ای (یا به طور عام‌تر، هیچ بازنمایی‌ای)، نمی‌تواند، در خود و از خود، به چیزی که تحت آن قرار می‌گیرد، وجود بدهد. در واقع، بازنمایی‌ها فقط فاصله معرفتی میان عالم و معلوم را افزایش می‌دهند، زیرا وجود معلوم را بلا تکلیف رها می‌سازند، ضمن آنکه درک بازنمایی آن چیزها را، که باید قبل از آنکه بتوان شیء را شناخت انجام گیرد، افزایش می‌دهند.

بنابراین، آنچه خواسته می‌شد، نوعی معرفت بدون بازنمایی از هستی بود. ایده آلیست‌های رمانتیک، برای حالت پارادایمی چنین معرفتی، به معرفت ما از خودهای اراده‌کننده و عمل‌کننده روی آوردند. بدین ترتیب، مدل ایشان برای معرفت به وجود، مدل معرفت به خود شد؛ برای دانستن آنکه چیزی وجود دارد، عالم باید آن را زندگی کند یا آن باشد. به عبارت دیگر، باید آن را در خود جذب نماید، به نحوی که معرفت وی از وجود آن، به معرفت او از وجود خود بدل گردد. همان‌گونه که شلینگ گفته است (نگاه کنید به [2.12]، 344)، «این گزاره که چیزهایی خارج از ما وجود دارند فقط ... تا میزانی یقینی است که با گزاره من وجود دارم یکسان باشد و قطعیت آن فقط می‌تواند با قطعیت گزاره‌ای که از آن استنتاج می‌گردد، مطابقت داشته باشد».

به نظر می‌رسد که براثر این برداشت ایده آلیست-رمانتیک از معرفت به وجود را پذیرفته بود. به اصطلاح قانون نخست شهودگرایی وی را می‌توان به مثابه صدور فرمان

فراخوان عالم ریاضی به عطف توجه به خود و گریز از واسطه‌مندی معرفتی دیدگاه کلاسیکی به ریاضیات با اشتغال آن به بازنمایی تفکر ریاضی - یعنی، زبان ریاضی - دید.^{۱۲} مثلاً به ما یادآوری می‌نماید:

عبارت بسیار بامعنای «به خود عطف توجه کن» را می‌شناسید. به نظر می‌رسد که نوعی توجه وجود دارد که حول خودتان متمرکز است و تا حدی در قدرت شماست. ما نمی‌توانیم بیشتر بگوییم این خود چیست؛ نمی‌توانیم درباره آن استدلال کنیم، زیرا همان گونه که می‌دانیم - هر صحبت یا استدلالی، عبارت است از توجه از فاصله‌ای بیشتر از خود؛ حتی نمی‌توانیم با استدلال یا کلمات به آن نزدیک‌تر شویم، بلکه فقط با «عطف توجه به سوی خود» به نحوی که به ما داده شده است، می‌توانیم بدان نزدیک‌تر گردید... اکنون، اختیار [اراده مختار] خود را می‌شناسید، زیرا مختار است که از عالم علیت روی برگرداند و آن گاه مختار بماند تا فقط در آن حال جهتی قطعی کسب کند که آن را، به طور برگشت‌پذیر، مختارانه دنبال خواهد نمود. ([2.14])

در اینجا، به روشنی، این اندیشهٔ رمانتیسیستی را می‌بینیم که بازنمایی مانع معرفت است - اندیشه‌ای که با عباراتی بسیار مشابه از سوی فیثه نیز بیان گردیده، او گفته است:

به خود بنگر. از هر چیز که تو را احاطه کرده است، روی برگردان و به حیات درونی خود روی آور. این نخستین چیزی است که فلسفه از پیروان خود می‌خواهد. آنچه مهم است، آن چیزی نیست که خارج از تو است، بلکه فقط آن چیزی است که از درون تو می‌آید. ([2.41], 422)

هر چند برای بحث بر له این، در اینجا فرصت کافی در اختیار نداریم، اما معتقدیم که براوئر در معرفت‌شناسی ریاضی خود بدین برداشت ایده‌الیست-رمانتیک از معرفت، پایبند بوده است. وی معتقد بود که وجود ریاضی عبارت است از ساخت، ساختی که نوعی فعالیت خودمختار «درونی» است^{۱۳} و بنابراین، معرفت ریاضی در نهایت شکلی از معرفت به خود است. نکتهٔ کلیدی در تذکر ویل جمع‌بندی گردیده (که آن را قبلاً نقل کردیم) که حساب، آفرینش آزاد ذهن انسانی و بنابراین، برای آن شفاف است.

پس، از نظر براوئر، دعاوی وجودی را، نمایش‌های اشیا (از نوعی که ادعا شده وجود دارد) حمایت می‌کرد، که این نمایش‌ها، در ژرفای خود، افعال آفرینشی (خلاق) از سوی فاعل شناسای ریاضی بودند. بدین ترتیب، وی از برداشت پذیرندهٔ کانتی از معرفت ما به

دعاوی وجودی، که اندیشه اصلی آن، آن بود که احکام وجود باید بر فاعل شناسنده منفعلی تحمیل گردد و نباید محصول فعالیت خلاقه یا ابداعی وی باشد، جدا گردید.^{۱۴}

پی‌نوشت‌ها

۱. این مقاله، بخشی است از مقاله‌ی میثائیل دتلفسن با عنوان فلسفه‌ی ریاضیات در قرن بیستم.
۲. خواننده به یاد خواهد آورد که در سال ۱۸۸۶، کرونگر در گفته‌ای مشهور یادآور گردید که هر چند خدا کل اعداد را آفرید اما هر چیز دیگری کار انسان است (*Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk*) این کرونگر را چگونه با کرونگری که دیدگاه گاوس را پذیرفته بود که اعداد محصول عقل انسانند و هندسه چنین نیست، چگونه در توافق قرار دهیم؟ به نظر می‌رسد پاسخ در تمایزی نهفته باشد که کرونگر میان حساب به معنای «مضیق» و حساب به معنای «گسترده» قائل بود. مراد وی از اولی، حساب اعداد طبیعی بود، در صورتی که از نظر وی دومی شامل جبر و آنالیز نیز می‌گردید (نگاه کنید به [2.91], 265). با حساب به معنای مضیق تلقی کردن کار خدا و تصور این که «هر چیز دیگر» در تذکر کرونگر نه به هندسه و مکانیک و مانند آن‌ها، بلکه به حساب به معنای گسترده اشاره دارد، می‌توان به راه حلی برای این تناقض ظاهری رسید.
۳. شماره صفحات مقالات براوتر، شماره صفحات تجدیدچاپ آن‌ها در [2.20] است.
۴. پوانکاره، یکی از ساخت‌گرایان نخستین، که بعداً در باره وی حرف‌های بیشتری برای گفتن خواهیم داشت، در این مورد هم با کانت و هم با براوتر و هم با دیگر ساخت‌گرایان نخستین مخالف بود. وی ادعا می‌کرد که «اصول موضوع هندسه... نه احکام تحلیلی پیشینی هستند و نه امور واقع تجربی... آن‌ها قرارداد... صرفاً تعریف‌های پوشیده هستند» (نگاه کنید به [2.99], pt. IDENTITY, ch. 3, section 10). برای بیان (از نظر من، نه کاملاً دقیق) برخی اختلافات دیگر، نگاه کنید به [2.21], 2-4.
۵. براوتر پوانکاره را، در کنار بورل و لیسگ، «پیشاشهودگرایان» می‌خواند. اما، برای منظور فعلی، اختلافات بیان‌شده میان «پیشاشهودگرایی» و «شهودگرایی» اهمیتی ندارد.
6. Cf. 'Revue de metaphysique et de morale' 14:17-34, 294-317, 627-50, 866-8; 17:451-82; 18:263-301; [2.121], 412-18, 15:141-3.
۷. چنان که در جای دیگری گفته است، باور به این که: «امکان گسترش معرفت شخص به حقیقت با فرآیند ذهنی تفکر، به ویژه تفکر همراه با عملیات زبانی مستقل از تجربه‌ی موسوم به «استدلال منطقی»، می‌تواند به حجم محدودی از تصدیقات «آشکارا» درست که عمدتاً بر تجربه مبتنی هستند و گاهی اصول موضوع خوانده می‌شوند، حقایق فراوان دیگری را بیفزاید» اشتباه است. (نگاه کنید به [2.19], 113)
۸. البته، براوتر معتقد بود میان رده‌ی قضیه‌هایی که می‌توان با منطق کلاسیکی از مجموعه‌ی S گزاره‌ها اثبات کرد و آن‌هایی که می‌توان با استدلال ریاضی شهودگرا از S اثبات کرد، تفاوت‌های مهمی وجود دارد.

- اما، همین ادعا را در مورد قضیه‌هایی که می‌توان از طریق منطق شهودگرا از S اثبات کرد و قضیه‌هایی که می‌توان با استدلال ریاضی خالص اثبات کرد، مطرح نساخته است. با این همه، میان اثبات قضایا با وسایل ریاضی محض و اثبات آن‌ها به وسیله‌ی منطق شهودگرا تفاوت قائل بود. در واقع، موضوع اصلی انتقاد وی از ریاضیات کلاسیکی آن بود که استدلال ریاضی از استدلال منطقی به طور کلی و نه فقط از استدلال منطق کلاسیکی متمایز است. برای جزئیات بیشتر در این باره، نگاه کنید به [2.28].
۹. پوانکاره به دلیل باور خود به آن چه مبنای بنیادی معرفت ریاضی می‌دانست، یعنی شرط معرفتی استدلال‌گر منطقی محض که هیچ یک از معماری‌هایی را که «مجاری» استنتاج ریاضی را خلق می‌کند، از ریاضی‌دان محضی که استنتاجات وی فراچنگ آوردن این مجاری را منعکس می‌کند، متفاوت است، به این برداشت از استنتاج رسید. براوتر، در اصل، قسمت اعظم این دیدگاه را قبول داشت. زیرا تأکید می‌کرد که استنتاج منطقی فقط فراچنگ آوردن مجاری حرکت باور را که با بازنمود زبانی باور ممکن گردیده، منعکس می‌کند؛ در صورتی که استنتاج ریاضی محض در امتداد مجاری‌ای حرکت می‌کند که آن فعالیت ساختی که خود قوم‌دهنده‌ی ریاضیات است، فراهم آورده است.
۱۰. اما پیش‌آگهی‌هایی از چنین مفهومی در نزد نوافلاطونیان مسیحی (مثلاً آگوستین، بوئتیوس و انسلم) و نیز در نزد کوزا وجود دارد. کوزا حتی برای این مفهوم، اصطلاحی ساخت - *visio intellectualis*. کانت نیز از چنین مفهومی سخن گفته است (نگاه کنید به [2.86], 307, 311-12 و [2.87], VOL. VIII, 389) هر چند فکر می‌کرد که فقط خدا، و نه انسان‌ها، می‌توانند دارای آن باشند.
۱۱. آن گونه که کانت گفته است (نگاه کنید به نخستین چاپ [2.86] که در ۱۷۸۱ منتشر گردید، 639 و [2.86], 667):
- «به هر شیوه‌ای که فهم به مفهومی رسیده باشد، وجود شیء، هرگز، با هیچ شیوه‌ی تحلیل، در درون آن قابل کشف نیست؛ زیرا معرفت به شیء دقیقاً در این امر نهفته است که شیء فی‌نفسه، خارج از صرف تفکر در باره‌ی آن، تصور می‌شود».
۱۲. نخستین قانون شهودگرایی می‌گوید که ریاضیات را باید «کاملاً ... از زبان ریاضی و از این روی از پدیده‌ی زبان که منطق نظری توصیف می‌کند، جدا ساخت» [2.21], 4-5).
۱۳. «وجود داشتن در ریاضیات یعنی: ساخته شدن» [2.15], 96).
۱۴. برای گسترش بیشتر این آراء و موضوعات مربوطه، نگاه کنید به [۲.۳۴].